1 Gara Matematica del 2009

1.1 Soluzione del primo esercizio

Per prima cosa, chiamiamo con colorazione k-esima l'istante in cui Carlo colora un quadretto di rosso e $2k-1$ quadretti di blu, con $k>0$ intero. Chiaramente, per come è definito il problema, la colorazione m-esima segue sempre la sequenza k-esima se $m \geq k$. Dopo k colorazioni, Carlo può inserire k quadretti rossi e $\sum_{i=1}^{k}(2k-1)$ quadretti blu. Ricordando che $\sum_{i=1}^{k} k = \frac{k(k+1)}{2}$, ricaviamo che

$$\sum_{i=1}^{k} 2k-1 = 2(\sum_{i=1}^{k} k) - \sum_{i=1}^{k} 1 = k(k+1) - k = k^2, \tag{1}$$

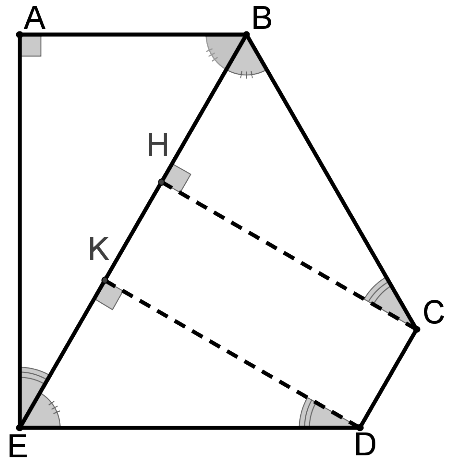
ossia all' istante k Carlo potrà dipingere $k+k^2$ quadretti.
La colorazione k-esima sarà completata se il numero di quadretti colorabili all'istante k è al più uguale al numero di quadretti della scacchiera, ossia se $k+k^2 \leq 10^4$. Cerchiamo il più grande intero k per cui questo è possibile: si tratta di trovare il più grande intero k che risolve $k^2+k-10^4 \leq 0$. Tale disequazione ha soluzioni reali nell'intervallo $[\frac{-1-\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2}]$. Indicando con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera di x, ossia il più grande intero minore o uguale ad x, il k che cerchiamo è

$$\left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{4\cdot 10^4}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-1+200}{2} \right\rfloor = 99.$$

Cosa succede al passo $k+1 = 100$? Carlo colora un altro quadrato rosso e alcuni quadrati blu (il loro numero è strettamente minore di $2(k+1)-1$), terminando così la colorazione del quadrato. Dunque, Carlo ha utilizzato $k+1 = 100$ quadrati rossi.

1.2 Soluzione secondo esercizio

In un poligono con n lati la somma interna degli angoli vale $180°(n-3)$: nel nostro caso $n=5$ e la somma degli angoli vale $540°$. Si ha pertanto che $\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{540-180}{3} = 120°$
Congiungiamo adesso il vertice B al vertice E (vedi figura): in tal modo si divide la figura di partenza in un trapezio e in un triangolo rettangolo.



Si noti che $\tan(A\hat{E}B) = \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, pertanto $A\hat{E}B = 30°$. Di conseguenza

$$A\hat{E}B = 30°, \quad A\hat{B}E = 60° \quad \overline{BE} = 4.$$

Prendiamo adesso in considerazione il trapezio $BEDC$ e si osservi che

$$C\hat{B}E = B\hat{E}D = 60°.$$

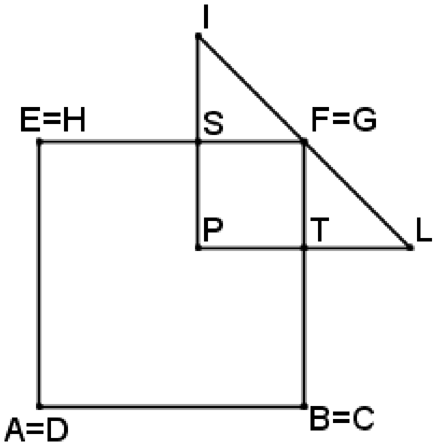
Si ha pertanto che il trapezio è isoscele e pertanto $\overline{BC} = \overline{ED} = 3$. Indicati poi con H e K i piedi delle altezze del trapezio condotte rispettivamente da C e D, si ha che $\overline{BH} = \overline{KE} = 3\cos 60° = \frac{3}{2}$ e pertanto $\overline{CD} = \overline{HK} = 1$.
L'altezza del trapezio risulta essere semplicemente $\frac{3\sqrt{3}}{2}$: pertanto si ha

$$2p_{ABCDE} = 2\sqrt{3} + 2 + 3 + 1 + 3 = 9 + 2\sqrt{3}$$

$$A_{ABCDE} = A_{ABE} + A_{BCDE} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2}(4+1) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{23\sqrt{3}}{4}$$

1.3 Soluzione terzo esercizio

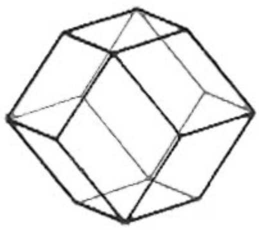
Le facce del solido ottenuto sono dodici, per dimostrarlo basta far vedere che l'angolo tra due facce che si appoggiano su uno stesso spigolo è di 180°. Per fare ciò consideriamola sezione del solido ottenuta con un piano passante per P e parallelo a una faccia del cubo.



Proviamo che l'angolo $\widehat{IFL}$ è piatto. Per costruzione si ha che $\overline{IS} = \overline{PS} = \overline{FT}$ e $\overline{LT} = \overline{PT} = \overline{SF}$ quindi i triangoli rettangoli ISF e FTL sono uguali da cui $\widehat{TFL} = \widehat{SIF}$. Osservando che $\widehat{SFI} + \widehat{SIF} = 90°$ si ottiene che:

$$\widehat{IFl} = 90° + \widehat{TFL} + \widehat{ISF} = 90° + \widehat{SFI} + \widehat{SIF} = 180°.$$

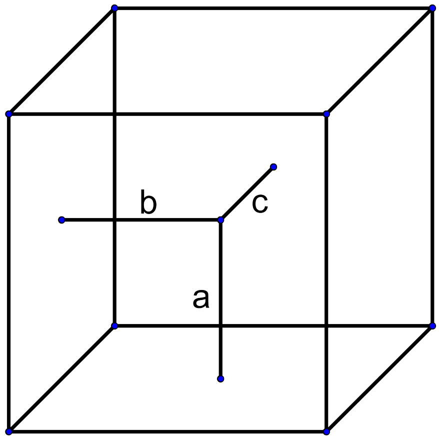
Il solido ottenuto si chiama dodecaedro rombico.



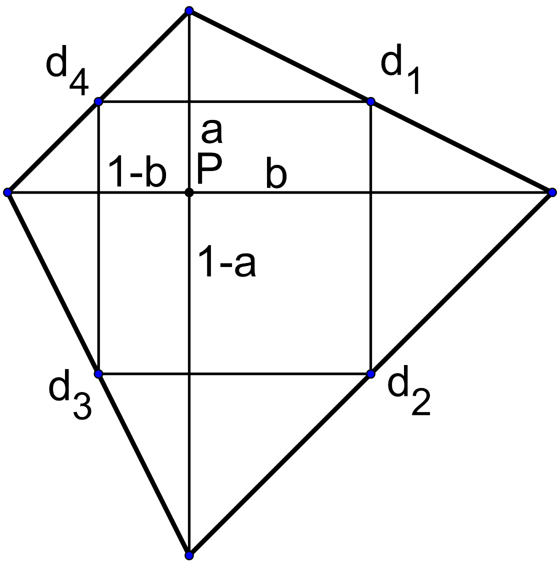
Per fare in modo che il solido abbia superficie minima bisogna scegliere come punto P il centro del cubo per dimostrarlo osserviamo per prima cosa che si può sempre supporre che il lato del cubo sia lungo 1. Inoltre le dodici facce del solido $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \ldots, 12)$ sono tutte rombi con una diagonale uguale al lato unitario del rombo e l'altra d_i che dipende da dove è situato il punto P, dunque

$$Area_{\mathcal{F}_i} = \frac{d_i}{2}.$$

Indichiamo con $a,\ b,\ c$ le distanze di P da tre facce del cubo tra loro a due a due perpendicolari.



Ad esempio, possiamo rappresentare bidimensionalmente quello che accade per le prime quattro diagonali:



Si conclude che la superficie totale del solido è data da:

$$S = \frac{1}{2}\{d_1 + d_2 + \cdots + d_{12}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{2\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{a^2+(1-b)^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+b^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2} +$$

$$+2\sqrt{c^2+b^2} + 2\sqrt{c^2+(1-b)^2} + 2\sqrt{(1-c)^2+b^2} + 2\sqrt{(1-c)^2+(1-b)^2} +$$

$$2\sqrt{a^2+c^2} + 2\sqrt{a^2+(1-c)^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+c^2} + 2\sqrt{(1-a)^2+(1-c)^2}\}.$$

Ora per ottenere il nostro risultato basta ricordarsi la disuguaglianza elementare:

$$(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$$

da cui prendendo le radici si ha che (se A e B sono positivi!):

$$\frac{A+B}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{A^2+B^2}.$$

Applicando quest'ultima all'espressione della superficie laterale del solido si ottiene dopo facili conti che:

$$S \geq 6\sqrt{2}$$

Ma $6\sqrt{2}$ è proprio la superficie laterale del solido ottenuto prendendo come punto P esattamente il centro del cubo.

1.4 Soluzione quarto esercizio

Dalla seconda equazione del sistema ricaviamo subito che $x > y$: in questo modo risulta che
$x - y < x + y$. La prima equazione si fattorizza nella forma:

$$(x-y)(x+y) = p^6$$

Essendo p un primo, otteniamo che

$$x - y = p^n$$

$$x + y = p^{6-n},$$

dove n è un intero positivo e $n < 6 - n$, ossia $n \in \{0, 1, 2\}$. In questo modo, x e y si scrivono come:

$$x = \tfrac{p^{6-n}+p^n}{2}$$

$$y = \tfrac{p^{6-n}-p^n}{2}$$

A questo punto, il primo termine della seconda equazione del sistema diventa:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+y^2+xy) = (x-y)[(x+y)^2 - xy] =$$

$$= p^n\left[p^{12-2n} - \tfrac{p^{12-2n}-p^{2n}}{4}\right] =$$

$$= p^n \left[\frac{3p^{12-2n}+p^{2n}}{4}\right] =$$

$$= p^{3n} \left[\frac{3p^{12-4n}+1}{4}\right],$$

cioè

$$p^{3n} \left[\frac{3p^{12-4n}+1}{2^2}\right] = p^4 q^2$$

Distinguiamo due casi:

- $p = 2$. In tal caso, l'espressione diventa:

$$2^{3n} \left[\frac{3p^{12-4n}+1}{2^2}\right] = 2^{3n-2} \left[3 \cdot 2^{12-4n} + 1\right] = 2^4 q^2$$

Si osserva subito che il fattore $3 \cdot 2^{12-4n} + 1$ risulta dispari e, dunque, l'unica possibilità che abbiamo è:

$$3 \cdot 2^{12-4n} + 1 = q^2,$$
$$2^{3n-2} = 2^4.$$

Segue che $3n - 2 = 4$, ossia $n = 2$. Sostituendo abbiamo:

$$3 \cdot 2^{12-4\cdot 2} + 1 = 49 = 7^2,$$

ossia $q = 7$, $x = \frac{2^4+2^2}{2} = 10$ e $y = \frac{2^4-2^2}{2} = 6$.

- p **dispari**. In tal caso, si osserva che il fattore $\frac{3p^{12-2n}+1}{4}$ non è divisibile per p. L'unica possibilità è:

$$\frac{3 \cdot p^{12-4n}+1}{4} = q^2,$$

$$p^{3n} = p^4.$$

Otteniamo $3n = 4$, ossia $n = \frac{4}{3}$, che è impossibile.

L'unica soluzione risulta essere:

$$(x, y) = (10, 6)$$

$$(p, q) = (2, 7)$$

.