Gara Matematica

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

Soluzioni edizione 2010

Esercizio 1

Siano **a**, **b** e **c** tre numeri interi dispari. Dimostrare che l'equazione

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

non ha soluzioni razionali, cioè non è verificata da alcun numero razionale.

Soluzione

Prima soluzione

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $x = \frac{m}{n}$ sia una soluzione dell'equazione assegnata, con $m, n \in \mathbb{Z}$. A meno di ridurre la frazione ai minimi termini, si può supporre m e n coprimi. Si ha che

$$a\frac{m^2}{n^2} + b\frac{m}{n} + c = 0,$$

ossia

$$am^2 + bmn + cn^2 = 0.$$

Andiamo ad analizzare la parità o disparità di $am^2 + bmn + cn^2$ a seconda della parità e disparità di m e n (m e n non sono entrambi pari, essendo la frazione ridotta ai minimi termini).

m	n	$am^2 + bmn + cn^2$
DISPARI	DISPARI	DISPARI
PARI	DISPARI	DISPARI
DISPARI	PARI	DISPARI

In tutti e tre i casi $am^2 + bmn + cn^2$ è dispari e questo è assurdo, dato che tale quantità deve essere nulla.

Seconda soluzione

Affinchè l'equazione considerata abbia soluzioni razionali, il discrimante del polimonio associato deve essere un quadrato, ossia

$$\Delta = b^2 - 4ac = d^2.$$

Dato che b è un numero dispari, d deve essere dispari. Ponendo $b = 2k + 1$ e $d = 2m + 1$, con k, $m \in \mathbb{Z}$, risulta che

$$(2k + 1)^2 - 4ac = (2m + 1)^2.$$

Svolgendo i conti, si ha che

$$4k^2 + 4k - 4m^2 - 4m = 4ac$$
$$8\left(\frac{k(k+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}\right) = 4ac$$

Poichè $\frac{k(k+1)}{2}$ e $\frac{m(m+1)}{2}$ sono numeri interi, otteniamo che la quantità a sinistra dell'uguaglianza è un numero divisibile per 8, mentre invece $4ac$ non lo è, essendo ac dispari. Risulta così che Δ non è un quadrato perfetto e che quindi l'equazione non ha soluzioni razionali.

Esercizio 2

In una scacchiera **5** $\times$ **5**, due caselle si dicono adiacenti se hanno un lato in comune. Valentina vuole disporre **25** pedine, **12** bianche e **13** nere, una per casella ed in modo da non avere pedine bianche in caselle adiacenti. In quanti modi si possono posizionare le pedine?

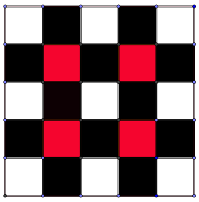
Soluzione

La prima osservazione che faremo è la seguente: consideriamo prima la nostra scacchiera non colorata e coloriamo una casella di bianco se Valentina inserisce una pedina bianca su tale casella, di nero se inserisce una pedina nera. Osserviamo che in ogni riga possiamo inserire al massimo 3 pedine bianche (coloriamo di bianco la prima , la terza e l'ultima casella) e che due righe adiacenti non possono avere entrambi 3 pedine bianche: concludiamo che le quintuple non ordinate che contano il numero di pedine bianche per ogni riga sono soltanto

$$(1, 2, 3, 3, 3) \quad (2, 2, 2, 3, 3)$$

Vi sono quindi due casi:

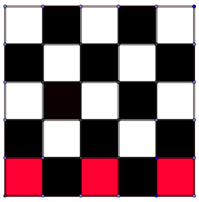
1. **CASO 1: una riga con una pedina bianca, una riga con due pedine bianche e tre righe con tre pedine bianche**.
   Chiaramente le 3 righe con le tre pedine bianche sono la prima, la terza e l'ultima: queste obbligano ad avere adiacenti solo pedine nere. Questa è la configurazione, dove le caselle rosse sono quelle ancora libere:



Restano quindi da inserire 3 pedine bianche in 4 caselle, dunque abbiamo 4 possibilità.

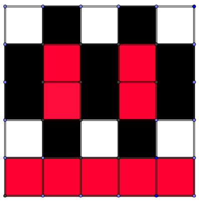
2. **CASO 2: tre righe con due pedine e due righe con tre pedine**. Andiamo ad analizzare quali sono le due righe che contengono tre pedine bianche. Tenendo contro che tali righe non possono essere consecutive, queste sono le varie possibilità:

   - **CASO 2A: Tre pedine bianche nella prima e terza riga**
     In questo caso, le pedine bianche da inserire nella seconda e quarta riga sono vincolate. Ecco la situazione:

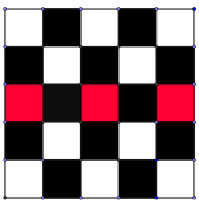
     Restano quindi da inserire 2 pedine bianche in 3 caselle, dunque abbiamo 3 possibilità.

   - **CASO 2B: Tre pedine bianche nella prima e quarta riga**

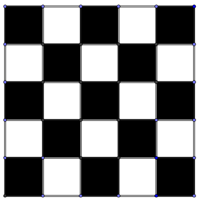
     Questo caso è impossibile, dato che obbliga ad avere almendo due coppie di caselle adiacenti bianche.

   - **CASO 2C: Tre pedine bianche nella prima e nella quinta riga**

     In questo caso restano da inserire 2 pedine su 3 caselle scoperte: dunque abbiamo 3 possibilità.

- **CASO 2D: Tre pedine bianche nella seconda e quarta riga**



Un'unica possibilità.

- **CASO 2E: Tre pedine bianche nella seconda e quinta riga** Invertendo l'ordine delle righe, ci riconduciamo al caso $2B$: dunque è impossibile
- **CASO 2F: Tre pedine bianche nella terza e quinta riga** Invertendo l'ordine delle righe, ci riconduciamo al caso $2A$: vi sono 3 possibilità.

In totale abbiamo quindi $\mathbf{4+3+3+3+1=14}$ possibilità.

Esercizio 3

Preso un mazzo con **40** carte, queste vengono mischiate più volte nel modo seguente: le **20** carte che stanno nella parte alta del mazzo vengono messe a sinistra e poi vengono inseriti perfettamente i due mazzetti uno nell'altro, nel senso che, partendo dall'alto nel mazzo finale, ritroveremo la prima carta del mazzetto a sinistra, poi la prima del mazzetto a destra, poi la seconda da sinistra e la seconda da destra, poi la terza da sinistra e la terza da destra, ..., l'ultima da sinistra e l'ultima da destra. Continuando a mischiare in questo modo, è possibile che prima o poi tutte le carte ritornino nella posizione che avevano inizialmente? In caso affermativo, qual è il numero minimo di smazzate necessarie? Esistono carte (oltre la prima e l'ultima) che tornano nella posizione iniziale più rapidamente di altre?

Soluzione

Adottiamo la seguente notazione: anziché numerare le carte da 1 a 40, le numeriamo da 0 a 39. Per prima cosa, elenchiamo i cicli degli spostamenti delle carte numerate. Affinchè le carte ritornino nella posizione iniziale tutte insieme, devono esistere dei cicli chiusi, ossia ogni carta deve tornare nella posizione iniziale dopo un numero finito di smazzate. Dati i numeri m e n indicheremo con $m \to n$ il fatto che dopo una smazzata la carta m va a finire nella posizione n. Per quanto già osservato se $\underbrace{m \to \cdots \to n}_{i\ volte}$ significa che dopo i smazzate la carta m va a finire nella posizione n.

Ecco i cicli:
$0 \to 0$ (la carta iniziale rimane dove è)
$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 25 \to 11 \to 22 \to 5 \to 10 \to 20 \to 1$ (Lunghezza 12)
$3 \to 6 \to 12 \to 24 \to 9 \to 18 \to 36 \to 33 \to 27 \to 15 \to 30 \to 21 \to 3$ (Lunghezza 12)
$7 \to 14 \to 28 \to 17 \to 34 \to 29 \to 19 \to 38 \to 37 \to 35 \to 31 \to 23 \to 7$ (Lunghezza 12)
$13 \to 26 \to 13$ (Lunghezza 2)
$39 \to 39$ (la carta finale rimane dove è)
Dall'elencazione dei cicli vediamo che la carta iniziale e quella finale rimangono ferme, tutti gli altri cicli hanno lunghezza 12 tranne quello delle carte 13 e 26 che ad ogni smazzata si scambiano di posizione. Concludiamo di nuovo che il numero minimo di smazzate per tornare alla posizione iniziale è 12 (m.c.m.$(1, 2, 12)$) ed esistono due carte (13-26) che tornano nella posizione iniziale dopo due smazzate.

Soluzione alternativa

Chiamiamo con $S_i(n)$ la posizione occupata dalla carta n dopo i- smazzate: vale che

$$S_1(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n < 20 \\ 2n - 39 & \text{se } n \geq 20. \end{cases}$$

Ne concludiamo che $S_1(n)$ calcola il resto della divisione di $2n$ per 39: questo in matematica si indica con

$$S_1(n) \equiv 2n \pmod{39}.$$

Per quanto riguarda le smazzate successive, abbiamo che $S_{i+1}(n) = S_i(S_1(n))$, ossia la posizione della carta n dopo $i + 1$ smazzate è uguale alla posizione di $S_1(n)$ dopo i smazzate. In modo analogo a prima, $S_i(n)$ calcola il resto della divisione di $2^i n$ per 39 e si indica con

$$S_i(n) \equiv 2^i n \pmod{39}$$

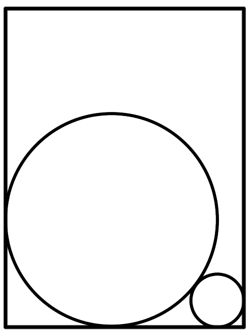
Dobbiamo vedere se esiste i tale che il resto della divisione di $2^i n$ per 39 è uguale a n per ogni $n = 0, 1, \cdot, 39$, ossia se esiste i tale che 39 divide $2^i n - n = n(2^i - 1)$ per ogni n. Dato che esistono valori di n coprimi con 39, basterà scegliere $n = 1$ e trovare il minimo i tale che 39 divide $2^i - 1$ (chiaramente $i \geq 1$), ossia il minimo i tale che il resto di 2^i per 39 è 1.

i	2^i	Resto di 2^i per 39
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	32
6	64	25
7	128	11
8	256	22
9	512	5
10	1024	10
11	2048	20
12	4096	1

Dunque il numero minimo di smazzate necessarie per tornare alla posizione iniziale è 12. Per vedere se esistono carte che tornano prima nella posizione iniziale, cerchiamo n tra i numeri interi minori strettamente di 39 che non sono coprimi con 39. Sia m il massimo comun divisore tra n e 39: m può essere soltanto 3 o 13. Se $m = 3$, dovrebbe risultare che 13 divide $2^i - 1$ e di nuovo otteniamo $i = 12$; se $m = 13$ (nel caso in cui $n = 13$ o $n = 26$), deve risultare che 3 deve dividere $2^i - 1$ e otteniamo $i = 2$. Dunque le due carte che tornano prima nella posizione iniziale (escluse le carte agli estremi) sono la 13 e la 26.

Esercizio 4

Due sfere pesanti vengono immerse in un recipiente cilindrico di diametro **9 cm** che contiene acqua e il livello del liquido all'interno si innalza di $\mathbf{\frac{1040}{243}}$ **cm**. Le due sfere si dipongono in modo tale da essere tangenti tra loro, alla base ed alla superficie laterale del cilindro, come indicato nel disegno accanto. Determinare il raggio delle due sfere.



Soluzione

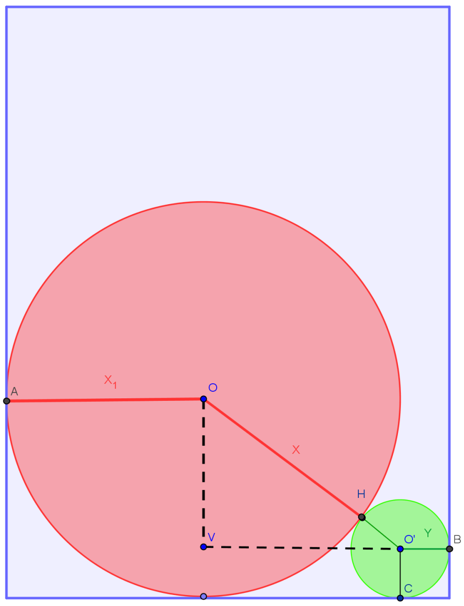
Definiamo con x e y i raggi delle due sfere, ponendo $x \geq y$. La prima informazione che ricaviamo dal testo è la seguente:

La somma dei volumi delle due sfere è uguale al volume di un cilindro di diametro 9 *cm e altezza* $\frac{1040}{243}$ *cm.*

Ricordando che il volume di una sfera di raggio R è uguale a $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e il volume di un clindro di diametro D e altezza H è dato da $V' = \pi\frac{D^2}{4}H$, otteniamo che:

La seconda informazione la ricaviamo dal disegno: le due sfere toccano il suolo, sono tangenti l'una all'altra e tangenti entrambi alle pareti del cilindro. Chiamando con A e con B rispettivamente il punto di contatto della prima e della seconda sfera con la superficie del cilindro, , con O e O' rispettivamente i centri delle due sfere, con H il punto di tangenza delle due sfere e con V l 'intersezione della semiretta parallela all'altezza del cilindro condotta da O con la semiretta parallela alla base del cilindro condotta da O'. Osserviamo che $\overline{AO} + \overline{VO'} + \overline{O'B} = 9 \ \ cm$, con $\overline{AO} = x$, $\overline{O'B} = y$. Calcoliamo $\overline{VO'} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OV}^2}$ Adesso $\overline{OO'} = x + y$ e $\overline{OV} = x - y$, per cui $\overline{VO'} = \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$. Mettendo insieme le cose, otteniamo $x + y + 2\sqrt{xy} = 9 \ \ cm$, ossia $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 9 \ \ cm$. Giungiamo alla conclusione che $\sqrt{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{y}} = \mathbf{3} \ \ \mathbf{cm}$: ponendo $X = \sqrt{x}$, $Y = \sqrt{y}$, il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} X + Y & = & 3 \\ X^6 + Y^6 & = & 65 \end{cases}$$



Una soluzione facile da individuare è $X = 2$ e $Y = 1$, ossia $x = 4 \ \ cm$ e $y = 1 \ \ cm$: facciamo vedere che è l'unica. Osserviamo che

$$X^6 + Y^6 = (X^3 + Y^3)^2 - 2(XY)^3 = (X+Y)^2(X^2 + Y^2 - XY)^2 - 2(XY)^3 = (X+Y)^2((X+Y)^2 - 3XY)^2 - 2(XY)^3$$

Usando i dati del sistema e chiamando $XY = P$, otteniamo

$$65 = 9(9 - 3P)^2 - 2P^3,$$

ossia P deve soddisfare la seguente equazione di terzo grado:

$$2P^3 - 81P^2 + 486P - 664 = 0$$

Tenendo conto che una soluzione la conosciamo già ($P = 2$, quando $X = 2$ e $Y = 1$), utilizzando il teorema di Ruffini, il polinomio si fattorizza nella forma

$$(P-2)(2P^2 - 77P + 332) = 0$$

Le soluzioni del polinomio di secondo grado sono

$$P_1 = \tfrac{77-\sqrt{3273}}{4} \quad P_2 = \tfrac{77+\sqrt{3273}}{4}$$

Nel caso in cui $P = P_1$, X e Y dovranno essere soluzioni dell'equazione:

$$Z^2 - 3Z + \tfrac{77-\sqrt{3273}}{4} = 0,$$

il cui discriminante è $\Delta = 9 - 77 + \sqrt{3273} = -68 + \sqrt{3273} < 0$ e dunque non ha soluzioni reali. Nel caso in cui $P = P_2$, X e Y dovranno essere soluzioni dell'equazione:

$$Z^2 - 3Z + \tfrac{77+\sqrt{3273}}{4} = 0\ ,$$

il cui discriminante è $\Delta = 9 - 77 - \sqrt{3273} = -68 - \sqrt{3273} < 0$ e dunque non ha soluzioni reali. In definitiva le uniche due soluzioni sono $\mathbf{x = 4\ \ cm}$ e $\mathbf{y = 1\ \ cm}$.