Gara Matematica - 18 maggio 2020

ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni esercizio occorre indicare come risposta un numero compreso tra 0000 e 9999
- Se la soluzione è un numero intero maggiore di 9999 si indichino le ultime quattro cifre del numero
- Se la soluzione è un numero negativo oppure il problema non ammette soluzione si indichi come risposta 0000
- Se la risposta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato si indichi la parte intera (cioè il più grande numero intero n minore o uguale a x)
- Per i calcoli utilizza i seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142, \quad \sqrt{3} = 1.7321, \quad \sqrt{5} = 2.2361, \quad \sqrt{7} = 2.6458, \quad \pi = 3.1416$$

---

1) Lo sviluppo piano della superficie laterale di un cono è un settore circolare di 126° e raggio 60. Quanto vale il quadrato dell'altezza del cono?

Risposta: [3159]

2) Calcolare la somma di tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{\frac{x-1011}{2019}} + \sqrt{\frac{x-1010}{2020}} + \sqrt{\frac{x-1009}{2021}} =$$
$$= \sqrt{\frac{x-2019}{1011}} + \sqrt{\frac{x-2020}{1010}} + \sqrt{\frac{x-2021}{1009}}.$$

Risposta: [3030]

3) Sommare tutti i numeri interi minori di 2020 i cui quadrati hanno le ultime tre cifre (cioè quelle delle centinaia, decine e unità) uguali ma non nulle.

Risposta: [8000]

4) Dato un numero razionale x positivo, scriviamone la frazione ridotta ai minimi termini (cioè con numeratore e denominatore primi tra loro) ed indichiamo con $f(x)$ il prodotto tra numeratore e denominatore. Indicare per quanti numeri razionali x dell'intervallo [0,1] si ha che $f(x) = 40!$.

Risposta: [2048]

5) Sull'insieme dei numeri naturali non nulli $\mathbb{N}$ definiamo la funzione

$$f(n) = \begin{cases} n^3 \text{ se } 2020 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4, \text{ con } x_i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

dove gli x_i sono interi positivi. Calcolare $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(11)$.

Risposta: [3402]

6) Un polinomio di quarto grado a coefficienti interi ha tra le sue radici -5, 18 e 20. Quanto vale al minimo la somma dei valori assoluti dei suoi coefficienti?

Risposta: [2004]

7) Trovare la somma di tutti i numeri interi n compresi tra 1 e 2020, tali che $2020n + 9$ è un quadrato perfetto.

Risposta: [5568]

8) Sapendo che a, b e c sono numeri positivi, qual è il valore minimo di $200\frac{a}{b} + 100\frac{b}{c} + 100\frac{c}{a^2} + 25\frac{b}{8}$?

Risposta: [0250]

9) Gli angoli A e B di un triangolo ABC hanno ampiezze 63° e 35° rispettivamente. Dal punto medio M del lato AB si traccia un segmento MN con N sul lato BC in modo tale che i perimetri di $AMNC$ e di MNB siano uguali. Determinare l'ampiezza dell'angolo MNC.

Risposta: [0139]

10) Quante sono le quaterne ordinate (a, b, c, d) di numeri interi con $0 < a < b < c < d \leq 2020$ e tali che ogni numero divide la somma degli altri tre?

Risposta: [1160]

11) Consideriamo una piramide di vertice S la cui base $ABCD$ è un parallelogramma. Per il punto A passa un piano che interseca lo spigolo SC nel punto L e gli spigoli SB ed SD rispettivamente nei punti K e M in modo tale che $\frac{SK}{KB} = 2$ e $\frac{SM}{MD} = \frac{1}{2}$. In che proporzione il punto L divide lo spigolo SC?. Scrivere il rapporto $\frac{SL}{LC}$ come frazione p/q con p e q primi fra loro. Indicare il valore di $p + q$.

Risposta: [0007]

12) Una pulce viene messa in una casella di una scacchiera 4x4 e ogni secondo salta in un'altra casella tra le quattro confinanti (cioè aventi un lato in comune). La scelta su quale salto fare è casuale (con probabilità uniformemente distribuita tra le possibilità che le si presentano al momento). Dopo aver passato un bel po' di tempo a guardare le evoluzioni della pulce, Pierino si convince che la probabilità di trovare occupata una specifica casella non è distribuita uniformemente e comincia a scattare foto ogni secondo fino a raccoglierne 10000. Calcolare il numero di foto con la pulce nella casella d'angolo in alto a destra (cioè calcolare il valore atteso o valore medio di tali foto).

Risposta: [0416]

13) Dato un quadrilatero convesso $ABCD$ sia O il punto di intersezione delle sue diagonali. Supponiamo che AOB sia il più piccolo degli angoli formati dalle due diagonali (angolo nel senso classico di regione di piano compresa tra due semirette uscenti da O). Il quadrilatero $ABCD$ ha la seguente proprietà: ruotando l'angolo AOB, di multipli di $90°$ intorno a O, la parte di quadrilatero interna all'angolo ha area costante. Sapendo che il perimetro del quadrilatero è 64, quanto può valere al massimo il prodotto tra la lunghezza di una diagonale e lo spessore della striscia più piccola che contiene il quadrilatero $ABCD$? (Lo spessore di una striscia è la distanza tra le due rette parallele che la determinano.)

Risposta: [0394]

14) Il giorno zero della quarantena Francesco ha piantato 2 germogli di asparagi. Come è noto, gli asparagi maturano in 2 giorni e una volta maturi non si deteriorano. Il giorno dopo, nessuna pianta è ancora matura e Francesco pianta altri 2 germogli. Dal secondo giorno in poi, la mattina Francesco semina tanti germogli quante sono le piante già presenti nell'orto poi, al pomeriggio raccoglie tutti gli asparagi maturi tranne 2. Finalmente, la sera del giorno 2018 la quarantena finisce, Francesco smette di piantare germogli e di raccogliere le piante mature. Due giorni dopo tutte le piante sono mature, le raccoglie tutte, lega gli asparagi in mazzetti da 71 ciascuno e mangia quelli che alla fine non sono sufficienti a completare un mazzetto. Quanti asparagi mangia?

Risposta: [0009]

15) Alcune caselle di una scacchiera 8x8 sono occupate da una pedina. Scelte cinque righe e cinque colonne eliminiamo le pedine sulle loro caselle. Se comunque sia fatta la scelta restano sempre almeno quattro pedine sulla scacchiera, quante pedine erano inizialmente presenti, come minimo, sulla scacchiera?

Risposta: [0045]

16) In un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 60 e 80 metri è contenuto un insieme di area 2114 metri quadrati. Quanto vale al minimo il suo perimetro?

Risposta: [0182]