



GARA MATEMATICA

Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini"
Viale Morgagni 67/a - 50134 Firenze

12 aprile 2022

Esercizio 1

Andrea ha ritrovato una vecchia calcolatrice con degli strani tasti, ma solo tre funzionano. Con il primo inserisce un 1 sul display (e quindi può scrivere anche 11, 111, ..., ma non può aggiungere una cifra 1 ad un numero già presente sul display); con il secondo moltiplica per 5 il numero visualizzato; con il terzo sottrae 3 al numero sul display. Inoltre la calcolatrice gestisce solo numeri con al più 5 cifre: se il risultato di un'operazione ha più di 5 cifre non viene visualizzato. Sapreste dire qual è il numero intero più grande visualizzabile sul display e quale è il numero intero positivo più piccolo che non è possibile visualizzare?

Esercizio 2

Sia ABC un triangolo rettangolo in C e sia CD l'altezza relativa all'ipotenusa. Siano M ed N rispettivamente i punti medi di CD e BD . Dimostrare che $AM \perp CN$.

Esercizio 3

Dato un triangolo ABC di area 1, consideriamo tutti i rettangoli contenuti in ABC con un lato parallelo ad uno stesso lato fissato del triangolo.

- Dimostrare che comunque si scelgano 2 di questi rettangoli, la loro unione lascia fuori una parte del triangolo di area almeno $\frac{1}{3}$.
- Dimostrare che, in generale, comunque si scelgano n rettangoli contenuti in ABC , la loro unione ha al massimo area $\frac{n}{n+1}$.

Esercizio 4

In una scacchiera 4×4 uno dei numeri $-1, 0, 1$ è scritto in ognuna delle 16 caselle e, come in figura, in fondo ad ogni riga e ad ogni colonna è riportata la somma dei numeri della riga o della colonna.

- È possibile far sì che gli 8 totali siano diversi tra loro?
- Se la scacchiera fosse 5×5 ?

1	0	-1	1	1
-1	0	1	0	0
-1	1	-1	-1	-2
0	-1	0	-1	-2
-1	0	-1	-1	